CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA BAO ĐÓNG NGUYÊN CỦA LUỸ THỪA IDEAL CẠNH CỦA ĐỒ THỊ PETERSEN

Đồng Hữu Mậu
Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

Tóm tắt: *Với một ideal đơn thức $reg(\overline{I^s})$ là một hàm tuyến tính khi s đủ lớn là tính chất quen thuộc của hàm chỉ số chính quy. Vấn đề xác định chỉ số dừng s_0 để $reg(\overline{I^s})$ là hàm tuyến tính và xác định các hệ số a, b trong biểu diễn $reg(\overline{I^s}) = as + b$ với mọi $s \geq s_0$ được rất nhiều nhà khoa học quan tâm. Có thể tiếp cận các vấn đề này từ khái niệm dải tự do tối tiểu hay dựa vào tính chất của các phần tử sinh của ideal I hay dựa vào bài toán quy hoạch tuyến tính. Trong bài báo này tác giả sẽ chỉ ra rằng hàm chỉ số chính quy của bao đóng nguyên của luỹ thừa ideal cạnh $reg(\overline{I^s})$ là hàm tuyến tính có hệ số góc 2 với n đủ lớn và chỉ số dừng $\overline{reg - stab}(I)$ với đồ thị Petersen thông qua đa diện Newton và bài toán quy hoạch tuyến tính.*

Từ khoá: *bao đóng nguyên, chỉ số chính quy, chỉ số dừng, đồ thị petersen, ideal cạnh.*

Nhận bài ngày 10.04.2025; gửi phản biện, chỉnh sửa, duyệt đăng ngày 30.05.2025
Liên hệ tác giả: Đồng Hữu Mậu; email: dhmau@hnmu.edu.vn

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford (gọi tắt là chỉ số chính quy) được bắt nguồn từ công trình về đường cong xạ ảnh của Castelnuovo và được Mumford [2] phát biểu định nghĩa cho các đa tạp xạ ảnh. Khái niệm này thiết lập mối liên hệ giữa lý thuyết đối đồng điều địa phương và các môđun xoắn phân bậc hữu hạn sinh trên vành đa thức trên một trường. Với $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ là một vành đa thức và $m = (x_1, \ldots, x_r)$ là ideal thuần nhất cực đại trong R. Cho M là $R -$môđun hữu hạn sinh, với mỗi $i = 0, \ldots, dimM$, bất biến a_i của M được định nghĩa như sau:

$$a_i(M) = \max\{t \,|\, H_m^i(M)_t \neq 0\}, \quad (1)$$

ở đó $H_m^i(M)$ là mô đun đối đồng điều địa phương của M với giá m, với quy ước rằng $a_i(M) = -\infty$ nếu $H_m^i(M) = 0$. Khi đó chỉ số chính quy của M được định nghĩa bởi

$$reg(M) = \max\{a_i(M) + i \,|\, 0 \leq i \leq \dim M\}. \quad (2)$$

Với I là một ideal thuần nhất thực sự của R ta có nhận xét rằng $reg\ (I) = reg\ (R\ /I) + 1$, điều này giúp ta nghiên cứu với $reg(R/I)$ thay vì nghiên cứu với $reg(I)$.

Bao đóng nguyên của ideal I là tập $\overline{I}$ gồm các phần tử $x \in R$ thoả mãn một quan hệ nguyên dạng:

$$x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0, a_i \in I^i, i = 1,2, \ldots, n. \quad (3)$$

Năm 1999, Cutkosky, Herzog và N.V. Trung [1] và độc lập với họ có Kodiyalam cùng chứng minh được rằng $reg(\overline{I^s})$ là một hàm tuyến tính khi s đủ lớn. Giả sử $reg(\overline{I^s}) = a.s + b$ với s đủ lớn. Khi đó ta có khái niệm chỉ số dừng của hàm chỉ số chính quy:

$$\overline{reg - stab}(I) = \min\{s_o \geq 1 \,|\, reg(\overline{I^s}) = as + b, s \geq s_o\}. \quad (4)$$

Chỉ số chính quy $reg(\overline{I^s})$ và chỉ số dừng $\overline{reg - stab}(I)$ là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Đây là các vấn đề khó, chưa có cách tiếp cận mang tính tổng quát và hiệu quả. Hiện nay, các nhà khoa học đang tập trung nghiên cứu hai khái niệm này đối với các ideal đặc biệt [3], [5], [6]. Trong bài báo này tác giả sẽ trình bày các kết quả liên quan đến chỉ số chính quy $reg(\overline{I^s})$ và chỉ số dừng $\overline{reg-stab}(I)$ đối với I là ideal cạnh của đồ thị Petersen.

2. NỘI DUNG

Trong phần này, ta xét $R = k[x_1, x_2, \dots, x_r]$. Trước tiên, tác giả nhắc lại về phức đơn hình và một số kiến thức đại số tổ hợp.

2.1. Phức đơn hình, đa diện Newton và công thức Takayama

Phức đơn hình Δ trên tập $V = \{1,2,\dots,r\}$ là tập hợp các tập con của V, gọi là các mặt, thoả mãn rằng nếu $F \in \Delta, G \subset F$ thì $G \in \Delta$. Một mặt của Δ không chứa trong một mặt khác của Δ được gọi là mặt cực đại. Với $T \subset V$, kí hiệu $x_T = \prod_{i\in T} x_i$. Ideal Stanley-Reisner liên kết với phức đơn hình Δ là ideal đơn thức không chứa bình phương $I_\Delta = (x_T | T \notin \Delta)$. Nếu I là một ideal không chứa bình phương thì nó là một ideal Stanley-Reisner của phức đơn hình $\Delta(I) = \{T \subset V | x_T \notin I\}$. Nếu I là ideal đơn thức bất kì ta cũng dùng kí hiệu $\Delta(I)$ là phức đơn hình ứng với ideal đơn thức không chứa bình phương

$$\sqrt{I} = \{f \in R | f^n \in I \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ nào đó}\}.$$

Để mô tả một ideal đơn thức người ta dùng đa diện Newton, điều này giúp việc nghiên cứu các ideal đơn thức phần nào bớt trừu tượng. Cho vectơ cột $\alpha \in \mathbb{N}^r$ ta viết $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.

Định nghĩa 1. Cho I là một ideal đơn thức của R. Chúng ta định nghĩa

(i) Với một tập con $A \subset R$, tập các mũ của A là $E(A) := \{\alpha | x^\alpha \in A\} \subset \mathbb{N}^r$.

(ii) Đa diện Newton của I là $NP(I) := conv\{E(I)\}$ là bao lồi của tập các mũ của I trong không gian $\mathbb{R}^r$.

Bao đóng nguyên của một ideal đơn thức I cũng là một ideal đơn thức, ta cũng có thể miêu tả $\bar{I}$ như sau:

$$E(\bar{I}) = NP(I) \cap \mathbb{N}^r = \{\alpha \in \mathbb{N}^r | x^{n\alpha} \in I^n, n \geq 1 \text{ nào đó}\}.$$
$$NP(I^n) = nNP(I) = nconv\{E(I)\} + \mathbb{R}_+^r, \text{với mọi } n \geq 1.$$

Bổ đề 2. ([3, Bổ đề 3.3]) Đa diện Newton $NP(I)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^r | a_i x \geq b_i, i = 1,2,\dots,s\},$$

ở đây $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ir})$ là các vectơ dòng, sao cho mỗi siêu phẳng với phương trình $a_i x = b_i$ xác định một mặt cực đại của $NP(I)$, chứa t_i điểm độc lập affine của $E\big(G(I)\big)$, $G(I)$ là hệ các dơn thức sinh ra ideal I, và song song với $r - t_i$ các vectơ cơ sở chính tắc. Hơn nữa chúng ta có thể chọn $0 \neq a_i \in \mathbb{N}^r$, các số nguyên dương $b_i, i = 1,2,\dots,s$ sao cho $a_{ij}, b_i \leq d(I)^{t_i}$ với mọi i, j, trong đó t_i là số thành phần toạ độ khác không của a_i.

Với I là một ideal đơn thức khác không, vì R/I là một đại số $\mathbb{N}^r$ phân bậc nên $H_m^i(R/I)$ là một R/I mô đun $\mathbb{Z}^r$ phân bậc với mọi i. Với mỗi bậc $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}^r$, để tính $\dim_k H_m^i(R/I)_\alpha$ ta dùng công thức được đưa ra bởi Takayama cái được tổng quát từ công thức của Hochster trong trường hợp I là ideal không chứa bình phương.

Đặt $G_\alpha = supp^-(\alpha) = \{i | \alpha_i < 0\}$. Với một tập con $F \subset V$, đặt $R_F = R[x_i^{-1} | i \in F]$. Khi đó phức bậc $\Delta_\alpha(I)$ được xác định bởi:

$$\Delta_\alpha(I) = \{F \subset V \backslash G_\alpha | x^\alpha \notin IR_{F\cup G_\alpha}\}. \tag{5}$$

Bổ đề 3. ([4, Định lý 2.2] -công thức của Takayama]). Ta có

$$\dim_k H_m^i(R/I)_\alpha = \begin{cases} \dim_k \widetilde{H}_{i-|G_\alpha|-1}(\Delta_\alpha(I); k) \text{ nếu } supp^-(\alpha) \subset \Delta(I) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ngược lại} \end{cases}. \tag{6}$$

Gọi $\Gamma \subset \Delta(\overline{I^n})$ là một phức đơn hình con với tập đỉnh $V(\Gamma) \subset [r]$. Chúng ta đặt

$$a_{\Gamma,i}(\overline{I^n}) = \begin{cases} \sup\{|\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{Z}^r \text{ và } \Delta_\alpha(\overline{I^n}) = \Gamma \text{ nếu } \widetilde{H}_{i+|V(\Gamma)|-r-1}(\Gamma; \mathrm{k}) \neq 0 \\ -\infty \qquad\qquad \text{trong trường hợp khác.} \end{cases} \tag{7}$$

Hệ quả 4. ([3, Hệ quả 3.5.]) Ta có $a_i(R/\overline{I^n}) = \max\{a_{\Gamma,i}(\overline{I^n}) \big| \Gamma \subset \Delta(\overline{I^n})\}$ và nếu $\widetilde{H}_{i+|V(\Gamma)|-r-1}(\Gamma; \mathrm{k}) \neq 0$ thì $a_i(R/\overline{I^n}) \in \mathbb{Z}$.

Ta gọi $\mathrm{supp}(a_i) = \{j | a_{ij} \neq 0\}$ là giá của a_i.

Bổ đề 5. ([3, Bổ đề 3.7.]) Giữ nguyên các kí hiệu của Bổ đề 2. Cho $\alpha \in \mathbb{Z}^r, n \geq 1$. Giả sử rằng $supp^-(\alpha) \in \Delta(I)$. Khi đó ta có

$$\Delta_\alpha(\overline{I^n}) = \langle [r] \backslash (supp(a_i) \cup supp^-(\alpha) | i \leq 25; supp^-(\alpha) \subset [r] \backslash supp(a_i) \text{ và } \sum_{j \notin supp^-(\alpha)} a_{ij}\alpha_j < nb_i \rangle. \tag{8}$$

2.2. Đa diện nguyên và bất biến $a_i(R/\overline{\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{n}}})$

Từ công thức (1) và (2) ta có thể giả sử $H_m^i(R/\overline{I^n})_\alpha \neq 0$ với $i \geq 0, n \geq 1, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Theo Bổ đề 3, ta có $\dim_{\mathrm{k}} H_m^i(R/\overline{I^n})_\alpha = \dim_{\mathrm{k}} \widetilde{H}_{i-|G_\alpha|-1}(\Delta_\alpha(\overline{I^n}); k) \neq 0$. Theo Hệ quả 4 ta suy ra $a_i(R/\overline{I^n}) \in \mathbb{Z}$.

Cho Γ là một phức đơn hình con của $\Delta(I)$ sao cho $\Gamma = \Delta_\alpha(\overline{I^n})$ với $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ nào đó, $n \geq 1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $V(\Gamma) = r', r' \leq r$ sao cho $supp^-(\alpha) = \{r'+1, \dots, r\}$, hơn nữa ta có thể giả sử $supp^-(\alpha) \subset [r] \backslash supp(a_i), i = 1,2, \dots s'$ và $supp^-(\alpha)$ không nằm trong $[r] \backslash supp(a_i)$ với $i > s', s' \leq s$. Khi đó theo (8) ta có thể giả sử rằng

$$\Gamma = \langle [r] \backslash supp(a_i) \cup supp^-(\alpha) | i = 1, \dots, s'' \rangle \text{ với } s'' \leq s'. \tag{9}$$

Với vectơ dòng $a = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ kí hiệu $a' = (a_1, \dots, a_{r'}) \in \mathbb{R}^{r'}$. Tương tự vectơ dòng. Ta xét các đa diện:

$$Q_{\Gamma.n} = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{r'} \middle| \begin{array}{c} a'_i.x' \leq n.b_i - 1, i = 1, \dots, s'' \\ a'_l.x' \geq n.b_l - 1, l = s''+1, \dots, s' \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, r' \end{array} \right\}, \tag{10}$$

$$P_{\Gamma.n} = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{r'} \middle| \begin{array}{c} a'_i.x' \leq n.b_i, i = 1, \dots, s'' \\ a'_l.x' \geq n.b_l, l = s''+1, \dots, s' \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, r' \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Bổ đề 6. ([3, Định lý 3.8.]) Khi $\widetilde{H}_{i+r'-r-1}(\Gamma; \mathrm{k}) \neq 0$ thì

$$a_{\Gamma,i}(\overline{I^n}) = \sup\{x_1 + \dots + x_{r'} | \, x' \in Q_{\Gamma,n} \cap \mathbb{N}^{r'}\} + r' - r. \tag{12}$$

Ta có nhận xét rằng, nếu gọi

$$\begin{gathered} \psi_n = \max\{x_1 + \dots + x_{r'} | \, x' \in P_{\Gamma,n}\}, \\ \Psi_n = \max\{x_1 + \dots + x_{r'} | \, x' \in Q_{\Gamma,n}\}, \\ M_n = \max\{x_1 + \dots + x_{r'} | \, x' \in Q_{\Gamma,n} \cap \mathbb{N}^{r'}\}. \end{gathered} \tag{13}$$

thì $\psi = \psi_1, \psi_n, \Psi_n$ đạt được tại một đỉnh của $P_{\Gamma,1}, P_{\Gamma,n}, Q_{\Gamma,n}$ và $\psi_n = \psi n$. Theo [3, mệnh đề 1.3.] ta có $\Psi_n = \psi.n + b_o$ khi n đủ lớn. Theo công thức (12) ta có $a_{\Gamma,i}(\overline{I^n}) = M_n + r' - r$. Do $Q_{\Gamma.n} \subset P_{\Gamma.n}$ nên $M_n \leq \Psi_n \leq \psi_n$. Điều này giúp ta khẳng định tính tuyến tính của hàm $reg(\overline{I^n})$.

Hai kết quả dưới đây cho ta thấy $reg(\overline{I^n})$ là một hàm tuyến tính khi n đủ lớn và một chặn trên chỉ số dừng $\overline{reg - stab}(I)$.

Bổ đề 7. ([7, Định lý 4.10]) Cho I là một ideal đơn thức khác không của R. Khi đó có số nguyên dương p và một số không nguyên không âm $0 \leq e \leq \dim(R/I)$ sao cho $reg(\overline{I^n}) = pn + e$ với n đủ lớn. Hơn nữa $pn \leq reg(\overline{I^n}) \leq pn + \dim(R/I)$ với mọi $n > 0$.

Bổ đề 8. ([3, Định lý 3.13]) Cho I là một ideal đơn thức khác không của vành $R = k[x_1, \dots, x_r]$ có bậc sinh cực đại là $d(I)$. Khi đó tồn tại số nguyên dương $p \leq d(I)$ và một số nguyên không âm $0 \leq e \leq \dim(R/I)$ sao cho $reg(\overline{I^n}) = pn + e$ với mọi $n \geq (r+1)(r+$